Ecole Nationale d'Architecture de Fès
1ère année – Semestre 2
A.U. 2021 - 2022

Notes de cours du module

Géométrie dans l'espace

Pr. K. BENMLIH

Table des matières

Introduction

Le but principal de ce cours est d'approfondir les connaissances de base des futurs architectes en géométrie, aussi bien plane (via les transformations du plan) que dans l'espace (via les notions de parallélisme et d'orthogonalité en 3D).

Chapitre 1

Les transformations dans le plan

Définition *Une transformation dans un plan $\mathcal{P}$ est une application bijective de $\mathcal{P}$ dans lui-même.*

Exemples :

— Une rotation est une transformation du plan

— Une projection orthogonale sur une droite n'est pas une transformation (n'est pas bijective).

1.1 Transformations usuelles

Dans la suite du cours, nous désignons par *transformation usuelle* l'une des quatre transformations suivantes : translation, homothétie, réflexion ou rotation.

1.1.1 Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation $t_{\vec{u}}$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad t_{\vec{u}}(M) = M' \quad \text{tel que } : \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Cas particulier : Si $u = \vec{0}$, $t_{\vec{0}} =$ l'identité.

Proposition 1.1.1

1. *Si on note par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $(AMM'B)$ est un parallélogramme.*
2. *Si $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.*
3. *La transformation réciproque de la translation $t_{\vec{u}}$ est la translation $t_{-\vec{u}}$.*

Preuve :

1.1.2 Homothétie

Soit Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation $h_{\Omega,k}$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad h_{\Omega,k}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

Cas particuliers :
* Pour $k = 1$: $h_{\Omega,1} =$ l'identité.
* Pour $k = -1$: $h_{\Omega,-1} =$ symétrie centrale.

Proposition 1.1.2

1. *Si $M' = h_{\Omega,k}(M)$ et $N' = h_{\Omega,k}(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.*
2. *La transformation réciproque de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ est l'homothétie $h_{\Omega,\frac{1}{k}}$.*

1.1.3 Réflexion (ou Symétrie axiale)

Soit Δ une droite du plan. La réflexion d'axe Δ est la transformation S_Δ définie pour tout $M \in \mathcal{P}$ par :

$$S_\Delta(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } M \in \Delta : & M' = M, \\ \text{Si } M \notin \Delta : & M' \text{ est tel que } \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] \end{cases}$$

Proposition 1.1.3

1. *Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite Δ et si A est un point de A alors $(\overrightarrow{AM'}, \vec{u}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.*
2. *Si $M' = S_\Delta(M)$ et $N' = S_\Delta(N)$, alors $M'N' = MN$.*
3. *La transformation réciproque de la symétrie S_Δ est la symétrie S_Δ elle-même.*

Preuve :
1.
2. Pour une réflexion $f = S_\Delta$ d'axe Δ. Considèrons un point $O \in \Delta$ et un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tel que l'axe des abscisses soit Δ. Dans ce repère, on note les coordonnées des points M et N par $M(x, y)$ et $N(X, Y)$. Par définition de la réflexion S_Δ, les coordonnées des images M' et N' sont par conséquent $M'(x, -y)$ et $N'(X, -Y)$. De ce fait, on a

$$M'N' = \sqrt{(X-x)^2 + (-Y-(-y))^2} = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = MN$$

3.

1.1.4 Rotation

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est la transformation $r_{\Omega,\theta}$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad r_{\Omega,\theta}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega M' = \Omega M, \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

Cas particuliers :
* Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $r_{\Omega,\theta+2k\pi} = r_{\Omega,\theta}$.
* Si $\theta = 0[2\pi]$, la rotation $r_{\Omega,0}$ est l'identité.
* Si $\theta = \pi[2\pi]$, la rotation $r_{\Omega,\pi}$ est la symétrie de centre Ω.

Proposition 1.1.4 *La transformation réciproque de la rotation $r_{\Omega,\theta}$ est la rotation $r_{\Omega,-\theta}$.*

Proposition 1.1.5 *Si $M' = r_{\Omega,\theta}(M)$ et $N' = r_{\Omega,\theta}(N)$, alors*

$$(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega N'}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \tag{1.1}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega N'}) &= (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) + (\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}) \\ &= -\theta + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) + \theta \\ &= (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \end{aligned}$$

□

1.2 Propriétés fondamentales

1.2.1 Points invariants

Définition 1.2.1 *On dit qu'un point M est invariant par la transformation f si $f(M) = M$. On notera par $I(f)$ l'ensemble des points invariants de f.*

Proposition 1.2.2

1. *Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation $t_{\vec{u}}$ n'a aucun point invariant : $I(t_{\vec{u}}) = \emptyset$.*
2. *Si $k \neq 1$, l'homothétie $h_{\Omega,k}$ a un seul point invariant qui est son centre : $I(h_{\Omega,k}) = \{\Omega\}$.*
3. *Pour une réflexion S_Δ, les seuls points invariants sont ceux de l'axe Δ : $I(S_\Delta) = \Delta$.*
4. *Lorsque $\theta \neq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, la rotation $r_{\Omega,\theta}$ a un seul point invariant qui est son centre : $I(r_{\Omega,\theta}) = \{\Omega\}$.*

1.2.2 Isométrie

Définition 1.2.3 *Une isométrie f est une transformation qui conserve les distances :*

$$f(M) = M' \text{ et } f(N) = N' \quad \Rightarrow \quad M'N' = MN$$

Théorème 1.2.4 *Les translations, les réflexions et les rotations sont des isométries.*

Preuve :
Soient M et N deux points quelconques du plan. Considérons leurs images par la transformation f : $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$ où f est une translation, ou réflexion ou une rotation. □

1. Si $f = t_{\vec{u}}$ une translation, on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. Donc $M'N' = MN$.
2. Pour une réflexion $f = S_\Delta$, voir proposition 1.1.3
3. Soit $f = r_{\Omega,\theta}$ une rotation. Considérons les deux triangles ΩMN et $\Omega M'N'$. Montrons que ces deux triangles sont égaux.
   Par définition de la rotation on a $\Omega M = \Omega M'$ et $\Omega N = \Omega N'$. De plus, selon la proposition 1.1, les deux angles respectifs sont égaux : $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega N'}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N})$.
   On en déduit que les deux triangles ΩMN et $\Omega M'N'$ sont égaux et par conséquent $M'N' = MN$.

Remarque 1.2.5 *Une homothétie $h_{\Omega,k}$ est une isométrie si et seulement si $k = \pm 1$.*

En effet, selon la proposition 1.1.2 on a $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. Donc $M'N' = |k|MN$. □

Proposition 1.2.6

1. *Une isométrie conserve les aires.*
2. *Une homothétie de rapport k multiplie les aires de k^2.*

1.2.3 Image de figures

Rappelons que pour une fonction bijective f et deux ensembles E et F, on a

$$f(E) = F \Longleftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow f(x) \in F)$$

Théorème 1.2.7 *Soient f une transformation usuelle, A et B deux points distincts du plan, et soient leurs images respectives $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Alors*
L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, avec conservation des milieux .

Preuve : Rappelons, selon le paragraphe précédent, qu'une transformation usuelle du plan est soit une isométrie, soit une homothétie de rapport $k \neq \pm 1$.

• Cas où f est une isométrie.

$$\begin{array}{lcl} M \in [AB] & \Leftrightarrow & AM + MB = AB \\ & \Leftrightarrow & A'M' + M'B' = A'B' \text{ (où } M' = f(M)) \\ & \Leftrightarrow & M' \in [A'B'] \end{array}$$

Donc $f([AB]) = [A'B']$.

En notant par I le milieu de $[AB]$, il en résulte que $I' = f(I) \in [A'B']$. De plus, comme $IA = IB$ et f est une isométrie, on aura $I'A' = I'B'$. Par conséquent, I' est le milieu de $[A'B']$.

• Cas où f est une homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \neq \pm 1$).

$$\begin{array}{lcl} M \in [AB] & \Leftrightarrow & AM + MB = AB \\ & \Leftrightarrow & |k|AM + |k|MB = |k|AB \\ & \Leftrightarrow & A'M' + M'B' = A'B' \\ & \Leftrightarrow & M' \in [A'B'] \end{array}$$

Par conséquent $f([AB]) = [A'B']$.

De même on a $I' \in [A'B']$. En multipliant l'égalité $IA = IB$ par $|k|$, on obtient $I'A' = I'B'$. Donc I' est le milieu de $[A'B']$. □

Corollaire 1.2.8

1. *L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.*
2. *L'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.*

Preuve :

$$\begin{array}{rcl} M \in (AB) & \Leftrightarrow & A \in [MB] \text{ ou } M \in [AB] \text{ ou } B \in [AM] \\ & \Leftrightarrow & A' \in [M'B'] \text{ ou } M' \in [A'B'] \text{ ou } B' \in [A'M'] \text{ (théorème précédant)} \\ & \Leftrightarrow & M' \in (A'B') \end{array}$$

Pour le 2e point, il suffit de rappeler qu'un parallélogramme est caractérisé par le fait que ses diagonales se coupent en leur milieu. □

Théorème 1.2.9 *Par une transformation usuelle, l'image du cercle $C(O,R)$ est un cercle de centre $O' = f(O)$ et de rayon R' avec :*

- ⋆ *$R' = R$ si f est une isométrie,*
- ⋆ *$R' = |k|R$, si f est une homothétie de rapport k.*

Preuve :

⋆ Pour une isométrie

$$\begin{array}{rcl} M \in C(O,R) & \Leftrightarrow & OM = R \\ & \Leftrightarrow & O'M' = R \\ & \Leftrightarrow & M' \in C(O',R) \end{array}$$

⋆ Pour une homothétie

$$\begin{array}{rcl} M \in C(O,R) & \Leftrightarrow & OM = R \\ & \Leftrightarrow & |k|OM = |k|R \\ & \Leftrightarrow & O'M' = |k|R \\ & \Leftrightarrow & M' \in C(O',|k|R) \end{array}$$

1.2.4 Image d'un angle

Théorème 1.2.10 *Les transformations usuelles conservent les angles géométriques. Plus précisément :*

1. *Les translations, les homothéties et les rotations conservent les angles orientés :*

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

2. *Une reflexion transforme un angle orienté en son opposé :*

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Lemme 1.2.11 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls distincts du plan, et $k, k' \in \mathbb{R}^*$. Alors*

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \begin{cases} (\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi], & si\ kk' > 0 \\ (\vec{u},\vec{v}) + \pi \quad [2\pi], & sinon \end{cases}$$

Preuve du Lemme :

Par la relation de Shasles, et en distinguant les cas, nous obtenons (modulo 2π) :

Cas 1 : $k > 0$ et $k' > 0$,

$$\begin{aligned}(k\vec{u}, k'\vec{v}) &= (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, k'\vec{v}) \\ &= 0 + (\vec{u}, \vec{v}) + 0 \\ &= (\vec{u}, \vec{v})\end{aligned}$$

Cas 2 : $k < 0$ et $k' < 0$,

$$\begin{aligned}(k\vec{u}, k'\vec{v}) &= (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, k'\vec{v}) \\ &= -\pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \\ &= (\vec{u}, \vec{v})\end{aligned}$$

Cas 3 : $k > 0$ et $k' < 0$,

$$\begin{aligned}(k\vec{u}, k'\vec{v}) &= (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, k'\vec{v}) \\ &= 0 + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \\ &= (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\end{aligned}$$

Cas 4 : $k < 0$ et $k' > 0$,

$$\begin{aligned}(k\vec{u}, k'\vec{v}) &= (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, k'\vec{v}) \\ &= -\pi + (\vec{u}, \vec{v}) + 0 \\ &= (\vec{u}, \vec{v}) - \pi\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème :

1.

$\star$ Pour une translation $t_{\vec{u}}$: il suffit de rappeler que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$.

$\star$ Pour une homothétie $h_{\Omega,k}$: $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

$\star$ Pour une rotation $r_{\Omega,\theta}$: Considérons un point du plan M tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{AB}$. Donc (ΩABM) est un parallélogramme. On en déduit que son image $(\Omega A'B'M')$ est aussi un parallélogramme et par conséquent $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{A'B'}$.

De la même manière, on considère un point N tel que $\overrightarrow{\Omega N} = \overrightarrow{CD}$ et on montre que $\overrightarrow{\Omega N'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Donc

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) &= (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega N'}) \\ &= (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \qquad \text{(selon (1.1))} \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\end{aligned}$$

□

2. Pour une réflexion S_Δ :

Soient $O \in (\Delta)$, M et N deux points du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$. On montre comme dans le cas d'une rotation que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{A'B'}$ et que $\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Donc
$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'})$$

Considérons un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (Δ). On peut écrire alors

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{ON'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{ON})$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) &= (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) \\
&= (\overrightarrow{OM'}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{ON'}) \\
&= (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{ON}) \\
&= -(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) - (\vec{u}, \overrightarrow{ON}) \\
&= -(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})
\end{aligned}$$

□

Signalons enfin que du théorème précédent, on peut aisément démontrer les deux corollaires importants suivants :

Corollaire 1.2.12 *Soient A, B deux points distincts du plan. Si $A' = r_{\Omega,\theta}(A)$ et $B' = r_{\Omega,\theta}(B)$ alors*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta = \text{ angle de la rotation}$$

Corollaire 1.2.13 *Les transformations usuelles conservent le parallélisme et l'othogonalité.*

1.3 Travaux dirigés

Exercice 1.1 Sur les trois côtés d'un triangle ABC, et à l'exterieur de celui-ci, on construit trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. Démontrer que $AA' = BB' = CC'$.

Exercice 1.2 Soient $ABCO$, $A'B'C'O$ et $A''B''C''O$ trois carrés de sens direct. On suppose que les points A, A' et A'' sont alignés sur une droite (Δ) et que le sommet commun O n'est pas sur (Δ).

1. Démontrer l'alignement des points C, C' et C''.
2. Démontrer l'alignement des points B, B' et B''.

Exercice 1.3 Soit ABCD un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ de mesures différentes.

1. Démontrer qu'il existe deux homothéties transformant $[AB]$ en $[CD]$. (Quelle relation y a-t-il entre les rapports de ces deux homothéties ?)
2. Les droites (AD) et (BC) se coupent au point E et les droites (AC) et (BD) se coupent au point F. En notant par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$, montrer que les 4 points E, F, I et J sont alignés.

Exercice 1.4 Dans un plan orienté, on considère deux cercles $\mathcal{C}(0, R)$ et $\mathcal{C}'(0', 2R)$ dont la distance entre les deux centres vérifie $OO' > 3R$.
Montrer qu'il existe au moins une homothétie transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 1.5 On considère un carré de sens direct $ABCD$ et de centre O. Soient les deux points E et F respectivement interieur et exterieur au carré $ABCD$, tels que les triangles BCE et DCF sont équilatéraux de sens direct. On considère le point H tel que AHC soit équilatéral de sens direct.

1. Vérifier que les points H, B et D sont alignés.
2. Montrer que les trois points A, E et F sont également alignés.
3. Montrer que $AC = EF$.
4. Soit G le point d'intersection de (EF) et (OD). Calculer l'angle $(\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GO})$.

Exercice 1.6 Soit ABC un triangle direct quelconque, Γ son cercle circonscrit et O le centre de Γ. Soit I le milieu de $[BC]$ et D le point de Γ diamétralement opposé à A. On considère les deux points B' et C' tels que B et C soient milieux respectifs de $[AB']$ et $[AC']$. Le point D se projette orthogonalement en K sur $[B'C']$. Soit Γ' l'image du cercle Γ par l'homothétie h de centre A et de rapport 2.

1. Déterminer le centre de Γ'.
2. Montrer que (DK) est médiatrice de $[B'C']$.
3. Déterminer l'image $h(I)$ et en déduire que les points A, I et K sont alignés.

Rappel : le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'intersection des trois médiatrices. Ce cercle passe par les sommets du triangle.

Exercice 1.7 (Point de *Vecten* dans un triangle)

Soit ABC un triangle de sens direct. On construit à l'exterieur du triangle, sur ses trois côtés, les carrés $BSRC$, $ACNM$ et $BAQP$ de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.
Il s'agit de montrer que les trois droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont concourentes en un point V (appelé "*point de Vecten*" du triangle ABC) qui n'est autre que l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.
On note par I le milieu du segment $[AB]$.

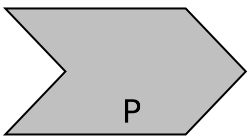
1. Démontrer que les segments $[BN]$ et $[AR]$ sont perpendiculaires et de même longueur.
2. En déduire que les segments $[IO_1]$ et $[IO_2]$ sont également perpendiculaires et de même longueur.
3. Démontrer que les segments $[AO_1]$ et $[O_2O_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur.
4. Quels autres résultats obtiendrait-on de façon analogue ?
5. Conclure.

Exercice 1.8 On considère les deux figures (Figure 1 et Figure 2) données dans les deux pages suivantes.
Dessiner successivement et avec précision :

1. Pour la figure 1 :
   (a) L'image de P par l'homothétie de centre Ω (donné) et de rapport $k = 2$, qu'on notera P'.
   (b) L'image de P' par la rotation de centre O (donné) et d'angle $\frac{-\pi}{2}$, qu'on notera P''.
2. Pour la figure 2 :
   (a) La figure F_1, image de la figure F par l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = 3$.
   (b) L'image de la figure F_1 par la réflexion d'axe Δ.

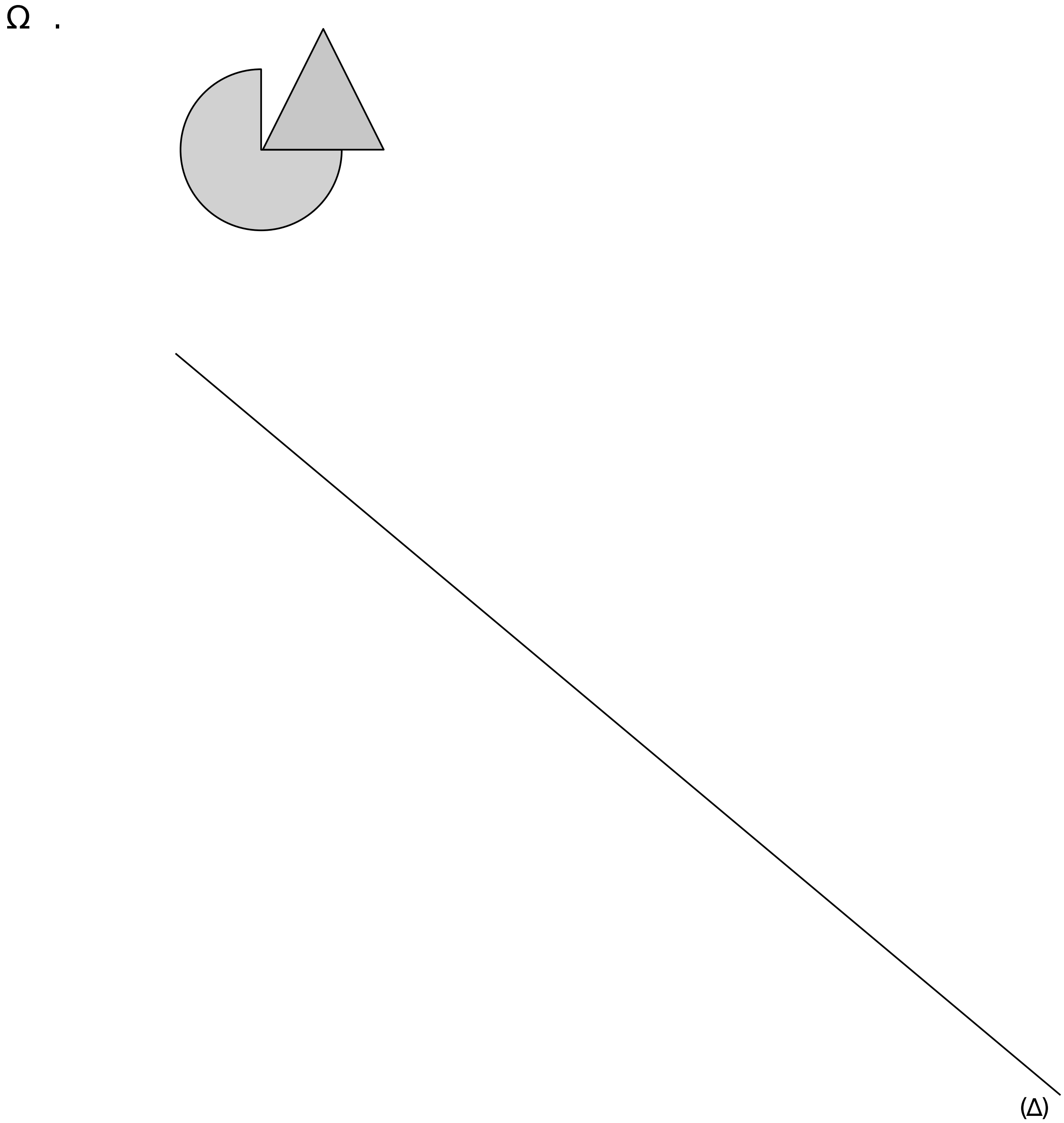
Figure 1

. 0



Ω .

Figure 2



Exercice 1.9 Soit ABC un triangle direct isocèle rectangle en A et E le milieu de $[BC]$ [1]. On construit un autre triangle direct EFG isocèle rectangle en E tel que $[EF]$ rencontre $[AC]$ en J, $[EG]$ rencontre $[AB]$ en I et (EG) ne soit pas parallèle à (AC).

1. Tracer soigneusement la figure.
2. Par les transformations usuelles du plan, montrer successivement que les droites (AF) et (BG) sont perpendiculaires, que $AF = BG$ et que $EJ = EI$.

Exercice 1.10 On considère un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ et un point A extérieur au cercle $\mathcal{C}$ tel que $OA < 2R$. Soit O' le milieu du segment $[AO]$ et soit le cercle $\mathcal{C}'(O', R')$ où $R' = R/2$. Considérons un point E appartenant à l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

1. Montrer que la droite (AE) rencontre le cercle C en un autre point, qu'on notera par F.
2. Par une transformation usuelle, montrer que E est le milieu du segment $[AF]$.
3. Montrer que toute tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par A est aussi tangente au cercle $\mathcal{C}'$. Justifier votre réponse.

1. Rappelons que "Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypothenus est équidistant aux trois sommets du triangle."

Chapitre 2

L'outil vectoriel en géométrie dans l'espace

Certains théorèmes de la géométrie plane ne sont pas valables dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Contrairement au cas d'un plan, deux droites sans intersection ne sont pas automatiquement parallèles. Néanmoins, lorsqu'on opère dans un même plan de l'espace on peut toujours utiliser les résultats et théorèmes connus tels que le théorème de Thalès, ou de Pythagore, ...

2.1 Règles fondamentales

Dans ce paragraphe, nous rappelons essentiellement les règles sur les positions relatives des droites et plans dans l'espace.

Proposition 2.1.1

1. *Trois points non alignés définissent un unique plan dans l'espace*
2. *Si A et B sont deux points distincts dans un plan P, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.*

Cette proposition est connue sous le nom des "règles d'incidence".

Selon le 1er point de cette proposition, on peut dire qu'un plan est entièrement déterminé par l'une des propriétés suivantes :
1) trois points non alignés,
2) deux droites distinctes sécantes,
3) deux droites strictement parallèles.

2.1.1 Position relative de deux droites distinctes de l'espace

Deux droites distinctes de l'espace sont
- Soit coplanaires (parallèles ou sécantes (en un point)),
- Soit non coplanaires.

Exemple : Soit ABCDEFGH un parallélipède rectangle direct. Alors
$\star$ Les droites EG et HG sont sécantes (coplanaires)

⋆ Les droites EF et HG sont parallèles (coplanaires)
⋆ Les droites EF et GC ne sont pas coplanaires.

2.1.2 Position relative de deux plans distincts de l'espace

Deux plans distincts de l'espace sont
- Soit parallèles (sans point commun),
- ou sécants (leur intersection est une droite).

2.1.3 Position relative d'un plan et d'une droite externe au plan

Soient un plan P et une droite d non incluse dans P, quelconques. Alors
- Soit P et d sont parallèles (sans point commun),
- Soit P et d sont sécants, et leur intersection est un point.

2.2 Parallélisme dans l'espace

Théorème 2.2.1

— *Deux droites parallèles à une même 3è sont parallèles entre elles.*

— *Deux plans sont parallèles à un même 3è sont parallèles entre eux.*

Théorème 2.2.2 *Soient P et P' deux plans parallèles de l'espace et Q un plan qui coupe P. Alors Q coupe aussi P' et les deux droites d'intersection avec P et P' sont parallèles.*

Théorème 2.2.3 *Si d est une droite parallèle à une autre d', alors d est parallèle à tout plan contenant d'.*

Théorème 2.2.4 *Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors ces deux plans P et P' sont parallèles.*

Théorème 2.2.5 *(théorème de toit)* *Soient deux droites parallèles d et d', contenues respectivement dans deux plans P et P'. Si P et P' sont sécants alors leur droite d'intersection est parallèle à d et à d'.*

Exercice 1 : Soient ABCD un tétraèdre et I, J, K les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$.

1. Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.
2. Soit O un point interieur au segment $[DI]$. Montrer que le plan (OJK) rencontre la plan (ABC) en une droite parallèle à la droite (JK).

Exercice 2 : Soient ABCDEFGH un cube et I un point interieur de l'arête $[BF]$. Montrer que les deux plans (FIG) et (EIH) se coupent en une droite paralèlle à la droite (FG) et la tracer.

2.3 Orthogonalité dans l'espace

2.3.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 2.3.1

1. *Deux droites sont dites perpendiculaires si elles sont coplanaires et forment un angle droit.*
2. *Deux droites de l'espace sont dites orthogonales lorsque l'une est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre.*

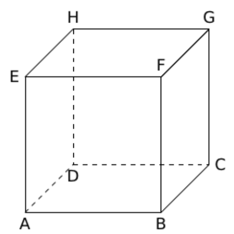
Exemple : Dans un cube ABCDEFGH, la droite (AB) est orthogonale à (FG) car $(AB) \parallel (EF)$ et (EF) est perpendiculaire à (FG).

2.3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 2.3.2 *Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites du plan.*

Théorème 2.3.3 *Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un même plan alors elle est orthogonale à ce plan.*

Remarque : La condition "sécantes" dans le théorème précédant est nécessaire.



En effet, dans un cube ABCDEFGH, la droite (AB) est orthogonale à (AD) et à (BC), mais elle n'est orthogonale au plan $(ABCD)$ car (AB) n'est pas orthogonale à (DC) qui est contenue dans le plan $(ABCD)$.

Dans la pratique, pour montrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, on peut démontrer que d_1 est orthogonale à un plan contenant l'autre droite d_2.

Exemple : Dans un cube ABCDEFGH, la droite (AE) est orthogonale à (HF).
En effet on a

$$\begin{cases} (AE) \text{ est orthogonale à } (HE) \\ (AE) \text{ est orthogonale à } (EF) \\ (HE) \text{ et } (EF) \text{ sont sécantes} \end{cases}$$

Donc, la droite (AE) est orthogonale au plan (HEF) et par conséquent (AE) est orthogonale à $(HF) \subset (HEF)$.

attention *Si deux droites sont orthogonales à une même troisième, ces deux droites ne sont pas nécessairement orthogonales entre elles.*

En effet, il suffit de penser à deux droites parallèles, orthogonales à une troisième droite !

Proposition 2.3.4

1. *Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.*
2. *Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.*

2.3.3 Orthogonalité de deux plans

Définition 2.3.5 *Deux plans sont orthogonaux si l'un contient une droite orthogonale à l'autre plan.*

attention *Si deux plans sont orthogonaux, cela ne veut pas dire que toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre plan.*

En effet, il suffit de penser aux deux plans $(ABCD)$ et $(FBCG)$ dans le cube ci-dessus. Ces deux plans sont orthogonaux mais (BC) et (FG) ne sont pas orthogonales !

2.4 Travaux dirigés

Exercice 2.1 ABCDEFGH est un cube et I le milieu de $[HG]$.

1. Déterminer l'intersection des plans (EIC) et (HGF).
2. Sachant que les plans (HGF) et (DCB) sont parallèles, déduire la droite Δ d'intersection des plans (EIC) et (DCB) et la tracer avec précision.

Exercice 2.2 Soit $ABCDEFGH$ un cube. I un point de l'arrête $[CG]$.

1. Montrer que le plan (EBI) et (CGH) se coupent en une droite parallèle à la droite (EB).
2. En déduire la construction du point J, intersection du plan (EBI) et de la droite (HG). (En justifiant votre réponse, comparer les deux distances HJ et IC)

Exercice 2.3 Trois points M, N et P appartiennent respectivement aux côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ d'un tétraèdre direct $ABCD$ de sommet A tels que : $AM = \frac{1}{4}AB$; $AN = \frac{3}{4}AC$ et $AP = \frac{1}{2}AD$.

1. Justifier pourquoi les deux droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.
2. On considère les intersections $I = (MN) \cap (BC)$, $J = (PN) \cap (DC)$ et $K = (MP) \cap (BD)$. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 2.4 Soient $ABCDEFGH$ un cube, $M \in [EA]$, $N \in [EH]$ et $P \in [EF]$.

1. Déterminer et tracer avec précision la droite (Δ), intersection des deux plans (MNP) et (DHG).
2. Vérifier que (Δ) et (MP) sont parallèles.

Exercice 2.5 $ABCDEF$ est un prisme droit. I est le milieu de $[EB]$.

1. Les droites (AB) et (DI) sont-elles coplanaires ? Sont-elles sécantes ? Justifier. Si les droites sont sécantes, déterminer leur point commun.
2. Faire de même avec les droites (BC) et (IF).
3. Construire la droite d'intersection des plans (ABC) et (DFI).

Exercice 2.6 Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les points I et J sont respectivement les milieux des segments $[BF]$ et $[AE]$.

1. Les droites (BD) et (DE) sont-elles orthogonales ?
2. Le triangle CDE est-il rectangle ?
3. Les droites (AG) et (FD) sont-elles sécantes et orthogonales ?
4. Montrer que les droites (AC) et (BF) sont orthogonales.
5. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (ADE) et à la droite (CF).
6. La droite (BE) est-elle orthogonale au plan (ADG) ?

7. Montrer que les droites (CH) et (AG) sont orthogonales.

$\boxed{\text{Exercice 2.7}}$ Soient SABC un tétraèdre régulier de sens direct. (Toutes les arêtes sont de même longueur)

Montrer que les droites (SA) et (BC) sont orthogonales.

$\boxed{\text{Exercice 2.8}}$ Soit $ABCDEFGH$ un cube. Démontrer les trois propositions suivantes :

1. Les droites (AE) et (HF) sont orthogonales.
2. La droite (HF) est orthogonale au plan (ACG).
3. Les droites (AF) et (HB) sont orthogonales.
4. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[GH]$, $[AB]$ et $[EF]$.
   (a) Démontrer que les droites (KG) et (JC) sont parallèles.
   (b) Le quadrilatère EICJ est-il un parallèlogramme ? un losange ? un carré ?

$\boxed{\text{Exercice 2.9}}$ Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que la droite (AD) est perpendiculaire aux arêtes $[BD]$ et $[CD]$. Soit I le milieu de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Démontrer que les droites (DI) et (BC) sont orthogonales.

Bibliographie (succinte)

[1] L'archipel des maths, Manuel, Moynier Editions, 2015

[2] Transmath, Manuel numérique, Edition Nathan, 2010