Chapitre 2

L'outil vectoriel en géométrie dans l'espace

Certains théorèmes de la géométrie plane ne sont pas valables dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Contrairement au cas d'un plan, deux droites sans intersection ne se coupents pas automatiquement. Néanmoins, lorsqu'on opère dans un même plan de l'espace on peut toujours utiliser les résultats et théorèmes connus tels que le théorème de Thalès, ou de Pythagore, ...

2.1 Règles fondamentales

Dans ce paragraphe, nous rappelons essentiellement les règles sur les positions relatives des droites et plans dans l'espace.

Proposition 2.1.1

1. *Trois points non alignés définissent un unique plan dans l'espace*
2. *Si A et B sont deux points distincts d'un plan P, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.*

Cette proposition est connue sous le nom des "règles d'incidence".

Selon le 1er point de cette proposition, on peut dire qu'un plan est entièrement déterminé par l'une des propriétés suivantes :
1) trois points non alignés,
2) deux droites distinctes sécantes,
3) deux droites strictement parallèles.

2.1.1 Position relative de deux droites distinctes de l'espace

Deux droites distinctes de l'espace sont
- Soit coplanaires (parallèles ou sécantes (en un point)),
- Soit non coplanaires.

Exemple : Soit ABCDEFGH un parallélipède rectangle direct. Alors

⋆ Les droites EG et HG sont sécantes (coplanaires)
⋆ Les droites EF et HG sont parallèles (coplanaires)
⋆ Les droites EF et GC ce sont pas coplanaires.

2.1.2 Position relative de deux plans distincts de l'espace

Deux plans distincts de l'espace sont
- Soit parallèles (sans point commun),
- ou sécants (leur intersection est une droite).

2.1.3 Position relative d'un plan et d'une droite externe au plan

Soient un plan P et une droite d non incluse dans P, quelconques. Alors
- Soit P et d sont parallèles (sans point commun),
- Soit P et d sont sécants, et leur intersection est un point.

2.2 Parallélisme dans l'espace

Théorème 2.2.1

— *Deux droites parallèles à une même 3è sont parallèles entre elles.*

— *Deux plans sont parallèles à un même 3è sont parallèles entre eux.*

Théorème 2.2.2 *Soient P et P' deux plans parallèles de l'espace et Q un plan qui coupe P. Alors Q coupe aussi P' et les deux droites d'intersection avec P et R' sont parallèles.*

Théorème 2.2.3 *Si d est une droite parallèle à une autre d', alors d est parallèle à tout plan contenant d'.*

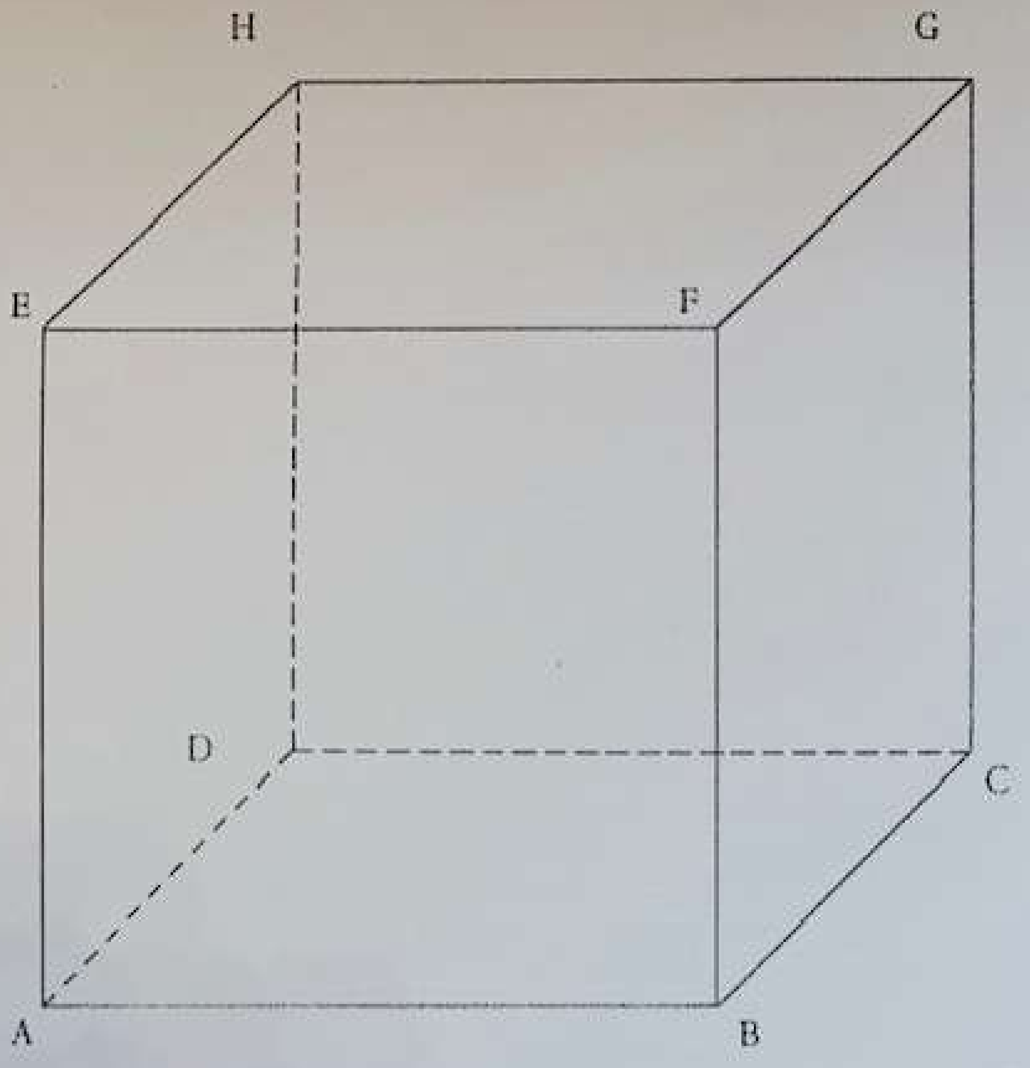
Théorème 2.2.4 *Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P', alors ces deux plans P et P' sont parallèles.*

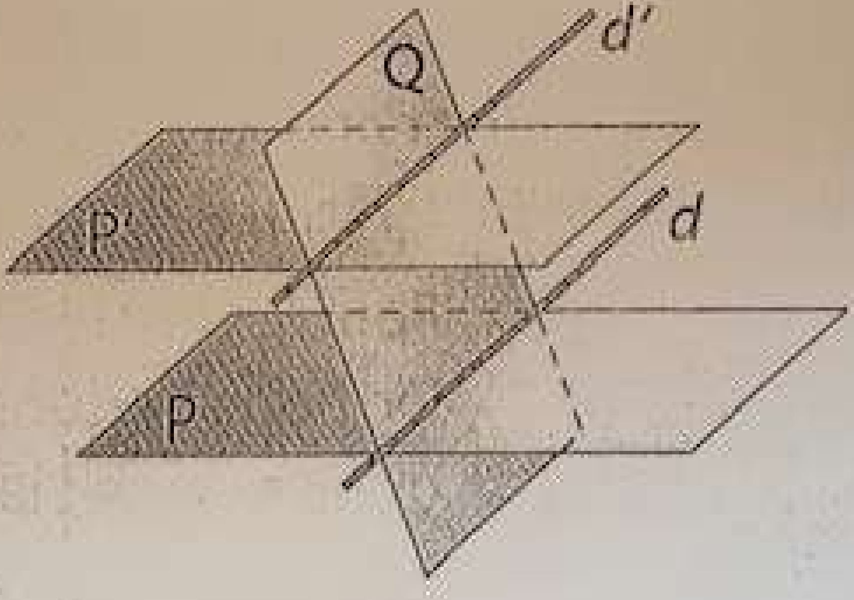
Théorème 2.2.5 *(théorème de toit)* *Soient deux droites parallèles d et d', contenues respectivement dans deux plans P et P'. Si P et P' sont sécants alors leur droite d'intersection est parallèle à d et à d'.*

Exercice : Soient ABCD un tétraèdre et I, J, K les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$.

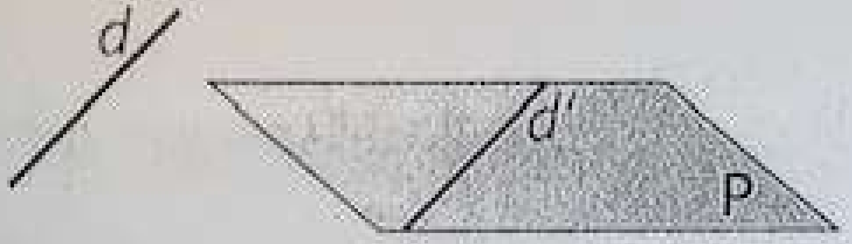
1) Montrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

2) Soit O un point interieur au segment $[DI]$. Montrer que le plan (OJK) rencontre la plan (ABC) en une droite parallèle à la droite (JK).

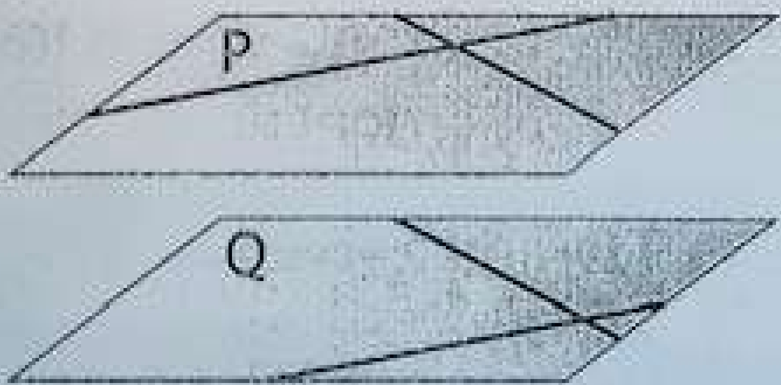

H
G
E
F
D
C
A
B



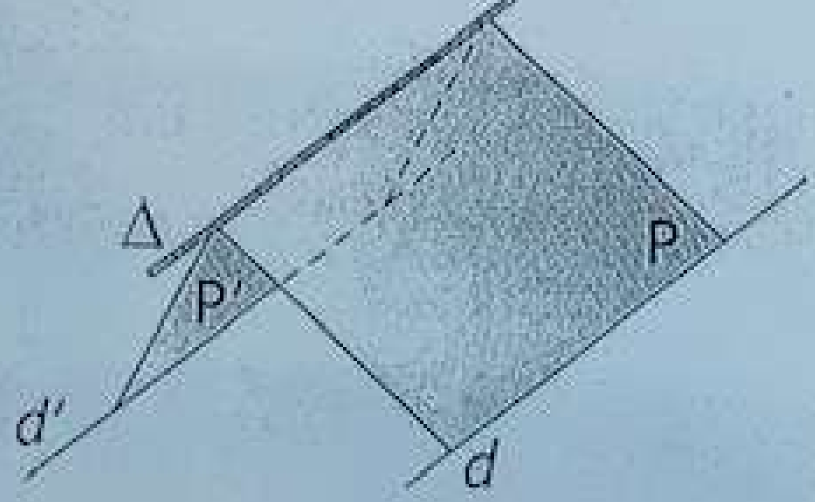
Q
d′
P′
d
P



d
d′
P



P
Q



Δ
P′
P
d′
d